مسائل مبانی جبر - زیرگروه‌ها (۳) (تاریخ تحویل ۹۹/۱/۳۰) (Jahangiri@khu.ac.ir)

۱- بررسی کنید مجموعه‌های زیر تحت اعمال داده شده یک گروه هستند؟ کدام یک گروهی دوری است؟ در صورت دوری بودن مجموعه مولدی برای آن ارائه کنید.

$G_1 = (\{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \times)$, $G_2 = (\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}, +)$

۲- از گروه‌های زیر کدام دوری است؟ تمام مولدهای هر کدام را که دوری است بنویسید.

$G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $G_3 = (\mathbb{Q}^+, \times)$, $G_4 = (6\mathbb{Z}, +)$

(منظور از $\mathbb{Q}^+$ مجموعه اعداد گویای بزرگتر اکید از صفر است و منظور از $6\mathbb{Z}$ مجموعه مضارب عدد ۶ در $\mathbb{Z}$ است.)

۳- فرض کنید G گروهی آبلی و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند. در این صورت ثابت کنید HK زیرگروهی از G است.

۴- نشان دهید هر گروه دوری با تنها یک مولد، حداکثر دو عضو دارد.

۵- فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. در این صورت نشان دهید $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ زیرگروهی از G است. (e عضو خنثی گروه G است.)

۶- فرض کنید G گروهی آبلی باشد $n \in \mathbb{N}$. در این صورت نشان دهید $H = \{x \in G \mid x^n = e\}$ زیرگروهی از G است.

۷- فرض کنید G گروهی متناهی باشد. در این صورت نشان دهید برای هر عضو a از G عدد طبیعی n موجود است به طوری که $a^n = e$. (e عضو خنثی G است.)

۸- فرض کنید H زیرمجموعه‌ای ناتهی و متناهی از گروه G باشد که تحت عمل گروه بسته است. (یعنی برای هر $x,y \in H$ داشته باشیم $xy \in H$.) در این صورت نشان دهید H زیرگروهی از G است.

۹- فرض کنید H زیرگروهی از گروه G باشد. در این صورت نشان دهید رابطه زیر یک رابطه

هم ارزی روی G است.

$\forall x,y \in G \qquad x \sim y \iff xy^{-1} \in H.$

۱۰- با مثالی نشان دهید گروهی مانند G معادله $x^2=e$ می‌تواند بیش از دو جواب داشته باشد.

۱۱- نشان دهید گروهی که تنها تعداد متناهی زیرگروه دارد، خود نیز گروهی متناهی است.

۱۲- کلیه زیرگروههای گروههای زیر را پیدا کنید و نمودار لاتیس آنها را رسم کنید. (نمودار لاتیس در پی‌نوشت سؤال معرفی شده است.)

Z_{12} و Z_{36} و Z_8

۱۳- فرض کنید H و K زیرگروههایی از گروه دوری و متناهی G باشند به طوری که تعداد اعضای H و K با هم برابرند. در این صورت ثابت کنید $H=K$.

۱۴- نشان دهید که گروهی دوری مانند G از مرتبه n، به ازای هر عدد طبیعی m که n را عاد کند معادله $x^m=e$ دقیقاً دارای m جواب در G می‌باشد. (منظور از مرتبه گروه تعداد اعضای گروه است.)

۱۵- تحت شرایط مسئله بالا، اگر $1<m<n$ و m، n را عاد نکند معادله $x^m=e$ چند جواب دارد؟ اگر $(m,n)=1$ چطور؟

۱۶- فرض کنید p عددی اول باشد. نشان دهید گروه جمعی Z_p زیرگروه غیربدیهی ندارد.

۱۷- فرض کنید H و K زیرگروههایی دوری از گروه آبلی G باشند به طوری که $|H|=n$ و $|K|=m$. در این صورت نشان دهید اگر $(m,n)=1$ آنگاه G زیرگروهی از مرتبه mn دارد.

۷.۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیررا تعیین کنید.

— ا) در هر گروه قانون شرکتپذیری برقراراست.

— ب) ممکن است گروهی هم باشدکه درآن قانون حذف برقرارنباشد.

— ج) هر گروه، زیرگروهی ازخودش است.

— د) هر گروه دقیقاً دو زیرگروه غیرواقعی دارد.

— ه) در هر گروه دوری، هرعضو یك مولد است.

— و) هنوز دراین متن مثالی ازگروهی ناآبلی ارائه نشده‌است.

— ز) هرمجموعه ازاعدادکه تحت جمع گروه باشد، تحت ضرب نیزگروه است.

— ح) یك زیرگروه را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ای ازیك گروه تعریف کرد.

— ط) Z_4 یك گروه دوری است.

— ی) هرزیرمجموعهٔ یك گروه تحت عمل القایی یك زیرگروه است.

۶.۶ درستی یا نادرستی هریك ازگزاره‌های ذیل را تعیین کنید.

— ا) هر گروه دوری آبلی است.

— ب) هر گروه آبلی دوری است.

— ج) Q باعمل جمع یك گروه دوری است.

— د) هرعضوهر گروه دوری یك مولدآن‌است.

— ه) حداقل یك گروه آبلی ازمرتبهٔ هرعدد طبیعی وجود دارد.

— و) هر گروه ازمرتبهٔ نابیشتراز ۴ دوری است.

— ز) تمام مولدهای Z_{20} اعداد اول هستند.

— ح) S_3 یك گروه دوری است.

— ط) A_3 یك گروه دوری است.

— ی) هر گروه دوری ازمرتبهٔ بزرگتراز ۲ حداقل دومولد متمایزدارد.