$(v_1 \approx v_2)$ ، $(v_2 \approx v_2)$ و $(\neg(v_1 \approx v_2))$ و $(\neg(v_1 \approx v_2)) \longrightarrow v_1$ ،

$\forall v_1 (\forall v_1 (v_2 \approx v_2))$ و $(\forall v_1 (v_1 \approx v_1))$ و ...

- به جای L هر زبان دیگری هم بود فرمول های بالا جزء دسته فرمول های آن زبان نیز بودند.

- برای هر فرمول در FL تعداد نمادهای $\neg$ ، $\longrightarrow$ ، $\forall$ به کار رفته در آن را درجه آن فرمول می نامیم.

- فرمول های درجه صفر، فرمول های اتمی نامیده می شوند. به عنوان مثال متغیرها فرمول های درجه صفرند.

مسئله. چند فرمول اتمی غیر متغیر در یک زبان صوری منطق محمولات دلخواه مثال بزنید.

تعبیر یک زبان صوری منطق محمولات (مرتبه اول):

اگر $L = \langle \{c_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{R_k\}_{k\in L}, \# \rangle$ یک زبان صوری منطق محمولات باشد یک تعبیر از L عبارت است از یک چهارتایی $\mathcal{M} = \langle D, \{a_i\}_{i\in I}, \{g_j\}_{j\in J}, \{S_k\}_{k\in L} \rangle$ با خواص زیر:

۱) D مجموعه ای ناتهی است $(D \neq \emptyset)$

۲) برای هر $i \in I$ ، $a_i \in D$

۳) برای هر $j \in J$ اگر $\# f_j = k$ آنگاه g_j یک تابع k متغیره روی D است

g_j (تابع) : $\underbrace{D \times \cdots \times D}_{k \text{ بار}} \longrightarrow D$

۴) برای هر $k \in L$ اگر $\# R_k = l$ آنگاه S_k یک رابطه l متغیره روی D است.

در این حالت می‌نویسیم $f_j^{\mathfrak{A}} = g_j$ و $c_i^{\mathfrak{A}} = a_i$ و $R_k^{\mathfrak{A}} = S_k$ و D را دامنه تعبیر $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.

مثال - برای زبان $\mathcal{L} = \langle \phi, \phi, \phi, \# \rangle$ به ازای هر مجموعه ناتهی D چهارتایی $\mathfrak{A} = \langle D, \phi, \phi, \phi \rangle$ یک تعبیر $\mathcal{L}$ است. (چرا؟)

- برای زبان $\mathcal{L} = \langle \{c_1, c_2\}, \{f\}, \{R\}, \# \rangle$ که $\# f = 1$ و $\# R = 2$، چهارتایی $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{N}, \{1, 2\}, \{s\}, \{\leq\} \rangle$ که $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto x+1$ تعبیری از $\mathcal{L}$ است.

($\leq$ رابطه کوچکتر یا مساوی است.)

برای یک زبان $\mathcal{L}$ ممکن است تعابیر مختلفی وجود داشته باشد. در مثال بالا،

$\mathfrak{A}_2 = \langle \mathbb{N}, \{1, 5\}, \{u\}, \{I\} \rangle$ نیز تعبیری از $\mathcal{L}$ است که در آن نماد "I" رابطه عادکردن است و $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto 2x$ یک تابع است. همچنین اگر H مجموعه همه انسان‌ها و $f : H \longrightarrow H$ که برای هر $x \in H$، $f(x)$ پدر x است تابعی باشد و R رابطه‌ای باشد که برای هر $(x, y) \in H \times H$، $R(x, y)$ یعنی x با y معاصر است آنگاه چهارتایی $\mathfrak{A}_3$ به صورت $\mathfrak{A}_3 = \langle H, \{\text{ابوی، خواهرزن}\}, \{f\}, \{R\} \rangle$ نیز تعبیری از $\mathcal{L}$ است.

مسئله - برای زبان $\mathcal{L}$ در مثال بالا شما نیز تعبیری ارائه کنید!

- در مثال $\mathcal{L}$ در بالا اگر $D = \{a\}$ مجموعه‌ای تک عضوی باشد آنگاه تنها دو تعبیر برای $\mathcal{L}$ می‌توانند تولید کنند: $\mathfrak{A}_1 = \langle D, \{a, a\}, \{f\}, \{g\} \rangle$ که در آن $f : \{a\} \longrightarrow \{a\}$, $a \longmapsto a$ و رابطه‌ای روی $D \times D$ است که $g(a, a)$ برقرار است

$\mathfrak{A}_2 = \langle D, \{a, a\}, \{f\}, \{g'\} \rangle$ که f همان است که در بالا معرفی شد اگر نیز گیری برای f وجود ندارد و رابطه‌ای روی $D \times D$ است که $g(a, a)$ درست نیست.

تعبیر ترمهای یک زبان منطق محمولات

تعریف اگر L یک زبان منطق محمولات و $\mathfrak{M}$ تعبیری از L با دامنه D باشد آنگاه هر تابع $\lambda: \{v_1, v_2, \dots\} \to D$ را یک تابع مقدار برای تعبیر $\mathfrak{M}$ می‌نامیم. به ازای یک تابع مقدار λ برای $\mathfrak{M}$ به هر ترم t از زبان L شیئی در D به شکل زیر نظیر می‌کنیم (که به صورت استقرایی تعریف می‌شود) و آن را با نماد $t^{(\mathfrak{M},\lambda)}$ نشان می‌دهیم و تعبیر t تحت $(\mathfrak{M},\lambda)$ می‌نامیم.

برای تعریف $t^{(\mathfrak{M},\lambda)}$ برای ترم $t \in Term(L)$ روی درجه t استقرای قوی انجام می‌دهیم:

فرض کنید $t^{(\mathfrak{M},\lambda)}$ برای ترم‌های با درجه اکیداً کمتر از n تعریف شده باشد و t ترمی از L با درجه n باشد. اگر $n=0$ آنگاه ترم t یا یک ثابت است و یا یک متغیر.

حالت ۱. اگر $t=c$ یک ثابت باشد آنگاه قرار می‌دهیم $t^{(\mathfrak{M},\lambda)} = c^{\mathfrak{M}}$.

حالت ۲. اگر $t=v_i$ یک متغیر باشد آنگاه قرار می‌دهیم $t^{(\mathfrak{M},\lambda)} = \lambda(v_i)$.

اگر $n \geq 1$ آنگاه ترم t به صورت $t = f(t_1, \dots, t_k)$ است که در آن f یک تابع نشانه از زبان L است و $\# f = k$ و $t_1, \dots, t_k$ ترم‌هایی از L هستند. درجه ترم‌های $t_1, \dots, t_k$ اکیداً از n کمتر است و مقادیر $t_1^{(\mathfrak{M},\lambda)}, \dots, t_k^{(\mathfrak{M},\lambda)}$ طبق فرض استقرا تعریف شده است. حال قرار می‌دهیم $t^{(\mathfrak{M},\lambda)} = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{(\mathfrak{M},\lambda)}, \dots, t_k^{(\mathfrak{M},\lambda)})$.

مثال. فرض کنید $L = \langle \{c_1\}, \{f, g\}, \emptyset, \# \rangle$ که $\# f = 1$ و $\# g = 2$.

در این صورت $t = g(g(v_1, c_1), f(v_2))$ ترمی از L از درجه ۳ است.

به ازای تعبیر $\mathfrak{M}_1 = \langle H, \{\text{مسعود}\}, \{f', g'\}, \emptyset \rangle$ که در آن H مجموعه انسان‌ها و $f: H \to H$ تابعی است که به ازای هر $x \in H$، $f(x)$ پدر x است و $g: H \times H \to H$ تابعی است که به ازای هر $x, y \in H$، $g(x,y)$ صمیمی‌ترین دوست x, y است. (فرض کنید $\mathfrak{M}_1$ تعبیری از L است)

و تابع $\lambda_1: \{v_1, v_2, \dots\} \to H$ که $\lambda_1(v_1)$ مجتبی و $\lambda_1(v_2)$ مرتضی و برای هر $i \geq 3$،

احمد = $\lambda(v_i)$ تعبیر مترم t به ازای $(\mathfrak{M}_1, \lambda_1)$ را پیدا می‌کنیم.

$$t^{(\mathfrak{M}_1,\lambda_1)} = g^{\mathfrak{M}_1}\left(g^{\mathfrak{M}_1}(\text{مرتضی}, f(\text{مسعود}), \text{مجتبی})\right)$$

$$= g^{\mathfrak{M}_1}(\text{پدر مرتضی}, \text{نزدیکترین دوست مسعود}, \text{مجتبی})$$

$$=$$ نزدیکترین دوست پدر مرتضی و نزدیکترین دوست مسعود و مجتبی

حال اگر تعبیر $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{12\}, \{S, +\}, \emptyset \rangle$ از L را در نظر بگیریم که در آن $S: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto x+1$ و $+: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(x,y) \longmapsto x+y$ و تابع مقدار $\lambda_2: \{v_1, v_2, \dots\} \longrightarrow \mathbb{N}$ را به صورت زیر در نظر بگیریم که $\lambda_2(v_1) = 6$ و $\lambda_2(v_2) = 7$ و برای هر $i \geq 3$ قرار دهیم $\lambda_2(v_i) = 1$ آنگاه تعبیر مترم $t = g(g(v_1, c_1), f(v_2))$ تحت $(\mathfrak{M}_2, \lambda_2)$ به صورت زیر است

$$t^{(\mathfrak{M}_2,\lambda_2)} = g^{\mathfrak{M}_2}\left(g^{\mathfrak{M}_2}(\lambda_2(v_1), c_1^{\mathfrak{M}_2}), f^{\mathfrak{M}_2}(\lambda(v_2))\right)$$

$$= g^{\mathfrak{M}_2}(6+12, 7+1) = 18+8 = 26$$

مسئله بررسی کنید اگر B مجموعه همه کتابها و $\emptyset$ و $\{f, g\}$ و $\{\text{دیوان حافظ}\}$ و $\mathfrak{M}_3 = \langle B, \{\text{دیوان حافظ}\}, \{f, g\}, \emptyset \rangle$ که در آن $f: B \longrightarrow B$ تابعی است که برای هر $x \in B$، $f(x)$ کتاب بعدی نویسنده اول x و $g: B \times B \longrightarrow B$ تابعی است که برای هر $x, y \in B$، $g(x,y)$ کتاب جبر خطی است که تعبیر از زبان L است. پس تعبیر مترم t در مثال بالا را تحت $(\mathfrak{M}_3, \lambda_3)$ که λ_3 تابع مقدار $\lambda_3: \{v_1, v_2, \dots\} \longrightarrow B$ است که در آن، $\lambda_3(v_1) =$ کتاب لغت و $\lambda_3(v_2) =$ کتاب لیلی و برای هر $i \geq 3$، $\lambda_3(v_i)$ کتاب مباحثه در جبر هاشتاین است، پیدا کنید.