نکته. تعریف. میدان k را بطور جبری بسته Algebraically closed می‌نامیم اگر هر چندجمله‌ای غیر ثابت با ضرایب در k، در k ریشه داشته باشد. یعنی برای هر $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\in k[x]$ اگر $\alpha\in k$ درجه باشد به طوری که $f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\dots+a_n\alpha^n=0$.

این ایجاب می‌کند که برای هر $f(x)\in k[x]$ اسکالرهای $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in k$ و اعداد $\beta_1,\dots,\beta_n$ و اعداد طبیعی $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{N}$ درجه باشند بطوریکه $f(x)=\prod_{i=1}^{n}\beta_i(x_i-\alpha_i)^{c_i}$.

c_i را چندگانگی multiplicity ریشه α_i از f می‌نامند.

ثابت می‌شود که هر $f(x)$ در $k[x]$ از درجه d در k دقیقاً d ریشه، با احتساب چندگانگی ریشه‌ها، دارد.

فضای آفین و مجموعه‌های جبری: Affine space and Algebraic sets

قرارداد: در ادامه این درس، k نشان دهنده یک میدان است.

تعریف. اگر $n\in\mathbb{N}$ آنگاه مجموعه

$$A^n(k):=\{(a_1,\dots,a_n)\mid a_1,\dots,a_n\in k\}$$

را n-فضای آفین (هموار، مساوی) می‌نامند.

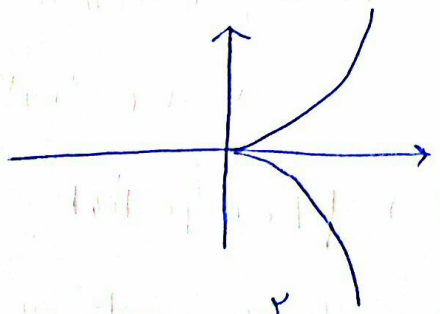
$A^1(k)$ را خط آفین و $A^2(k)$ را صفحه آفین می‌نامند.

- برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]$ قرار می‌دهیم

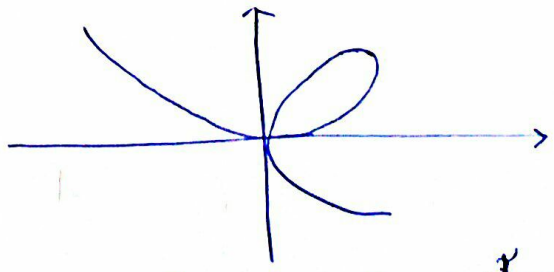
$$V(f):=\{(a_1,\dots,a_n)\in A^n(k)\mid f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0\}$$

اگر f ثابت نباشد، $V(f)$ را یک ابررویه hypersurface می‌نامیم.

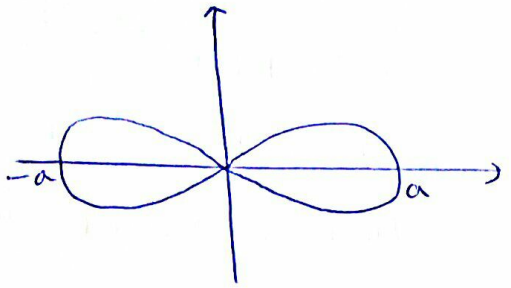
مثال:



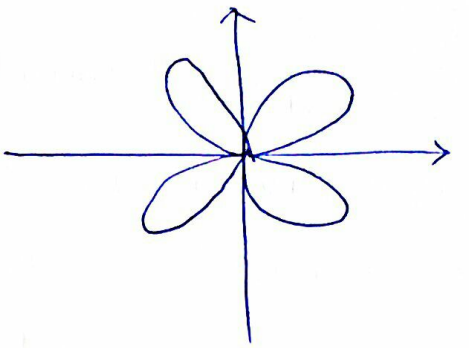
$V(y^2-x^3)\subseteq A^2(\mathbb{R})$



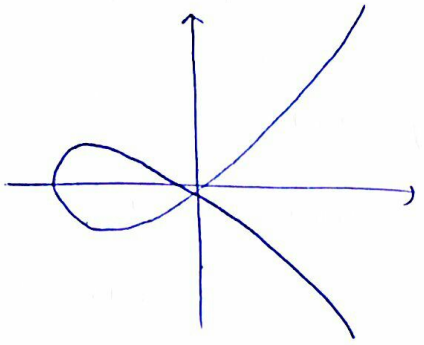
$V(x^3+y^3-xy)\subseteq A^2(\mathbb{R})$



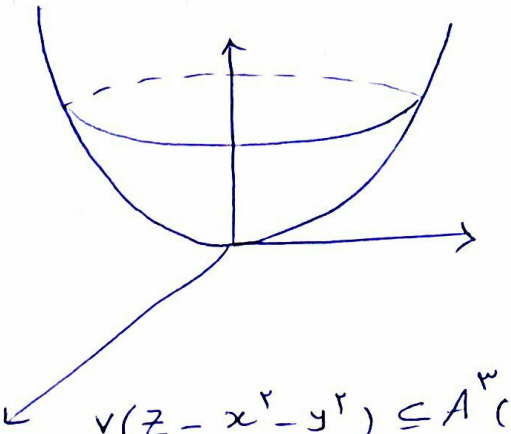
$V((x^2+y^2)-a^2(x^2-y^2)) \subseteq A^2(\mathbb{R})$



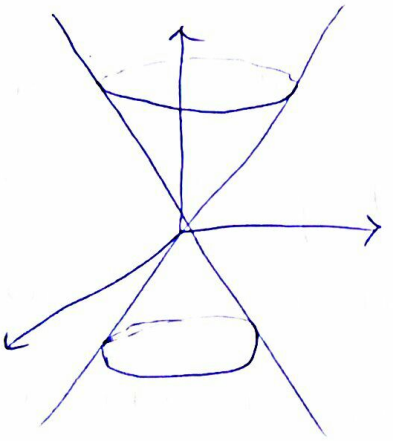
$V((x^2+y^2)^3-4x^2y^2) \subseteq A^2(\mathbb{R})$



$V(y^2-x^2(x+1)) \subseteq A^2(\mathbb{R})$



$V(z-x^2-y^2) \subseteq A^3(\mathbb{R})$



$V(z^2-x^2-y^2) \subseteq A^3(\mathbb{R})$

- **تعریف.** فرض کنید $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$. در این صورت مجموعه زیر را یک مجموعه جبری آفین می‌نامند.

$$V(S) := \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n(k) \mid \forall f(x_1, \dots, x_n) \in S \quad f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}$$

مثال. مجموعه $V = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq A^2(\mathbb{R})$ یک مجموعه جبری آفین است. در واقع $V = V(x^2+y^2-1)$.

- اما مجموعه $A = \{(t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq A^2(\mathbb{R})$ یک مجموعه جبری نیست.

پس اگر A جبری باشد آنگاه چندجمله‌ای‌های $f_1(x,y), \dots, f_n(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$

موجودند به طوری که

$$A=\{(t,\sin t)\mid t\in\mathbb{R}\}=V(f_1(x,y),\dots,f_n(x,y))$$
$$=\{(a,b)\in A^2(\mathbb{R})\mid f_1(a,b)=\dots=f_n(a,b)=0\}.$$

در این صورت برای هر $-1\le y_0\le 1$ داریم

$$A\cap\{(x,y_0)\mid x\in\mathbb{R}\}=V(f_1(x,y_0),\dots,f_n(x,y_0))\subseteq A^1(\mathbb{R})$$

مجموعه‌ای جبری در $A^1(\mathbb{R})$ است. (چون فضای صفرهای چند جمله‌ای‌های یک متغیره $f_1(x,y_0)$ و ... و $f_n(x,y_0)$ است.) اما مجموعه فوق نامتناهی است در حالیکه می‌دانیم بنا به نکته صفحه ۷ تعداد ریشه‌های چند جمله‌ای‌های یک متغیره متناهی است. این تناقض نشان می‌دهد مجموعه A جبری نیست.

"مزاره" اگر $n\in\mathbb{N}$ و $V\subseteq A^n(k)$ یک مجموعه جبری باشد آنگاه ایده‌آل رادیکال $\underline{a}$ از حلقه چند جمله‌ای‌های $k[x_1,\dots,x_n]$ موجود است به طوری که

$$V=V(\underline{a})=\{(a_1,\dots,a_n)\in A^n(k)\mid \forall f(x_1,\dots,x_n)\in\underline{a}\quad f(a_1,\dots,a_n)=0\}$$

برهان. چون $V\subseteq A^n(k)$ جبری است پس $S\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ موجود است به طوری که

$$V=V(S)=\{(a_1,\dots,a_n)\in A^n(k)\mid \forall f(x_1,\dots,x_n)\in S\quad f(a_1,\dots,a_n)=0\}.$$

قرار دهید $\underline{a}$ را رادیکال ایده‌آل تولید شده توسط S باشد، یعنی $\underline{a}=r(\langle S\rangle)$. نشان می‌دهیم $V=V(\underline{a})$ و واضح است که $\underline{a}$ ایده‌آلی رادیکال از $k[x_1,\dots,x_n]$ است.

چون به وضوح $S\subseteq r(\langle S\rangle)$ پس $V(S)\supseteq V(r(\langle S\rangle))$ (چرا؟).

حال فرض کنید $(a_1,\dots,a_n)\in V(S)$. در این صورت

$$\forall f(x_1,\dots,x_n)\in S\qquad f(a_1,\dots,a_n)=0 \qquad (1)$$

به علاوه فرض کنید $g(x_1,\dots,x_n)\in\underline{a}=r(\langle S\rangle)$ عضوی دلخواه باشد. در این صورت $m\in\mathbb{N}$ موجود است به طوری که $g^m\in\langle S\rangle$ (طبق تعریف رادیکال یک ایده‌آل)

لذا، بنا به تعریف ایده‌آل تولید شده توسط یک مجموعه، عناصر $t\in\mathbb{N}$ و $f_1,\dots,f_t\in S$ و $h_1,\dots,h_t\in k[x_1,\dots,x_n]$ موجودند به طوری که

$$g^m = h_1 \cdot f_1 + \cdots + h_t \cdot f_t$$

بنابراین به ازای $(a_1, \dots, a_n) \in V$ داریم

$$g^m(a_1, \dots, a_n) = h_1(a_1, \dots, a_n) f_1(a_1, \dots, a_n) + \cdots + h_t(a_1, \dots, a_n) f_t(a_1, \dots, a_n)$$

$$= 0 \quad \text{(بنا به رابطه (۱) در صفحه قبل)}$$

و چون $(g(a_1, \dots, a_n))^m = g^m(a_1, \dots, a_n) = 0 \in k$ و k حوزه صحیح است پس $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. در نتیجه ثابت کردیم که برای هر $(a_1, \dots, a_n) \in V(S)$ و هر $g(x_1, \dots, x_n) \in \underline{a} = r(\langle S \rangle)$ داریم $g(a_1, \dots, a_n) = 0$. بنابراین $V(S) \subseteq V(\underline{a})$.

لذا تساوی برقرار است و $V = V(S) = V(r(\langle S \rangle))$ و حکم ثابت می‌شود. $\boxtimes$

برخی خواص اساسی مجموعه‌های جبری:

(۱) اگر I, J ایده‌آل‌هایی از حلقه چندجمله‌ای‌های $k[x_1, \dots, x_n]$ باشند آنگاه $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$. (به علاوه $V(I) = V(\sqrt{I})$.)

(۲) اگر $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های $k[x_1, \dots, x_n]$ باشد آنگاه $V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$.

(۳) $V(\underline{0}) = k[x_1, \dots, x_n]$ و $V(k[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$

(۴) اگر $S_1, S_2 \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ به طوری که $S_1 \subseteq S_2$ آنگاه $V(S_2) \subseteq V(S_1)$.

همچنین اگر I, J ایده‌آل‌هایی از $k[x_1, \dots, x_n]$ باشند به طوری که $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ آنگاه $V(J) \subseteq V(I)$.

(۵) برای هر $d_1, \dots, d_n \in k$ داریم $V(\langle x_1 - d_1, \dots, x_n - d_n \rangle) = \{(d_1, \dots, d_n)\}$.

(۶) برای هر زیرمجموعه جبری $V \subseteq A^n(k)$، $t \in \mathbb{N}$ و $f_1, \dots, f_t \in k[x_1, \dots, x_n]$ وجود دارد به طوری که $V = V(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_t(x_1, \dots, x_n))$.

برهان. (۱) بنا به تعریف، واضح است که $V(I)\cup V(J)\subseteq V(I\cap J)$ (بررسی کنید.) حال فرض کنید $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(I\cap J)$ و $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\notin V(J)$. در این صورت $f(x_1,\dots,x_n)\in J$ موجود است به طوری که $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0$. چون $IJ\subseteq I\cap J$ پس، طبق تعریف، $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(IJ)$. در نتیجه برای هر $g(x_1,\dots,x_n)\in I$ چون $gf\in IJ$ پس $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n).f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$. چون k حوزه صحیح و $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq 0$ پس $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$، برای هر $g\in I$. لذا $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(I)$. بنابراین $V(I\cap J)=V(I)\cup V(J)$.

چون $I\subseteq\sqrt{I}$ پس $V(\sqrt{I})\subseteq V(I)$ (چرا؟) همچنین اگر $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(I)$ و $g\in\sqrt{I}$ آنگاه $t\in\mathbb{N}$ موجود است که $g^t\in I$، بنا به تعریف رادیکال یک ایده‌آل. در نتیجه $g^t(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ و چون k حوزه صحیح است پس $g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ یعنی $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(\sqrt{I})$.

(۲) از طریق عضوگیری براحتی ثابت می‌شود. (بررسی کنید!)

(۳) به کمک وجود چندجمله‌ای‌های ثابت ناصفر در $k[x_1,\dots,x_n]$ داریم $V(k[x_1,\dots,x_n])=\emptyset$

(۴) قسمت اول بنا به تعریف واضح است. حال اگر I و J ایده‌آل‌هایی از $k[x_1,\dots,x_n]$ باشند که $\sqrt{I}\subseteq\sqrt{J}$ و $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(J)$ و $f(x_1,\dots,x_n)\in I$ آنگاه $f\in\sqrt{I}$ لذا $f\in\sqrt{J}$ و در نتیجه $t\in\mathbb{N}$ موجود است که $f^t\in J$ در نتیجه $f^t(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ و چون k حوزه صحیح است پس $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$. یعنی $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(I)$. لذا $V(J)\subseteq V(I)$.

(۵) واضح است!

(۶) فرض کنید $V\subseteq A^n(k)$ مجموعه‌ای جبری باشد. در این صورت بنا به گزاره ۴ در صفحه ۹ ایده‌آل رادیکال a از حلقه $k[x_1,\dots,x_n]$ موجود است به طوری که $V=V(a)$. بنا به قضیه

پایه‌ای هیلبرت در صفحه ۳، چون k میدان، و در نتیجه نوتری است، حلقه چندجمله‌ای‌های $k[x_1,\dots,x_n]$ نیز نوتری است (نتیجه ۳ در صفحه ۶ را ببینید.) لذا ایده‌آل $\underline{a}$ متناهی‌مولد است و $t\in\mathbb{N}$ و چندجمله‌ای‌های $f_1,\dots,f_t\in k[x_1,\dots,x_n]$ در صورتی که $\underline{a}\overset{(*)}{=}\langle f_1,\dots,f_t\rangle$. در نتیجه

$$V=V(\underline{a})=V(\langle f_1,\dots,f_t\rangle)$$

نشان می‌دهیم $V=V(\{f_1,\dots,f_t\})$. چون $f_1,\dots,f_t\in\underline{a}$ پس بنا به بند (٤)، $V(\{f_1,\dots,f_t\})\supseteq V(\underline{a})=V$. بعلاوه، اگر $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(\{f_1,\dots,f_t\})$ و $g(x_1,\dots,x_n)\in\underline{a}$ عضو دلخواهی باشد آنگاه بنا به $(*)$، عناصر $h_1,\dots,h_t\in k[x_1,\dots,x_n]$ در صورتی که $g=f_1h_1+\dots+f_th_t$. در نتیجه

$$g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\underbrace{f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}_{0}h_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+\dots+\underbrace{f_t(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}_{0}h_t(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$
$$=0$$

لذا $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(\underline{a})$. بنابراین $V(\underline{a})=V(\{f_1,\dots,f_t\})$ ∎

قرارداد. اگر $f_1,\dots,f_t\in k[x_1,\dots,x_n]$ آنگاه برای راحتی قرار داد می‌کنیم

$$V(f_1,\dots,f_t)=V(\{f_1,\dots,f_t\})$$
$$=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in A^n(k)\mid f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0,\ \text{برای هر } i\}$$