مسائل تحقیقی مبانی منطق ریاضی مجموعه‌ی دوم (تاریخ تحویل ۲۵/۱/۹۹) (Jahangiri@khu.ac.ir)

۱- درجه فرمول‌های زیر را تعیین کنید

$(p_1 \to p_2) \to p_3$ و $(p_1 \to \neg\neg p_2) \to \neg p_3$ و $((\neg p_1) \to p_2) \to \neg\neg p_3$

۲- فرض کنید $L = \{p_1, p_2, p_3\}$ و تعبیر M از L به گونه‌ای باشد که $p_1^M = 0$، $p_2^M = 1$، $p_3^M = 0$.
در این صورت ارزش فرمول‌های زیر در FL را تعیین کنید.

$\neg\neg p_2 \to p_3$ و $(\neg p_2 \to \neg p_3) \to p_1$ و $\neg(\neg p_1 \to p_2)$

$p_1 \leftrightarrow p_3$ و $p_1 \vee \neg p_2$ و $p_2 \wedge \neg p_3$ و $(p_1 \to \neg p_2) \to p_1$

۳- اگر $L = \{p_1, p_2, p_3\}$ کدام یک از زیرمجموعه‌های زیر در FL مصدق پذیرند. در صورت مصدق پذیری مدلی برای آن ارائه کنید.

الف- $\Sigma = \{p_1 \vee p_2 \text{ و } p_2 \wedge p_3 \text{ و } \neg p_3\}$

ب- $\Sigma = \{(\neg p_1) \wedge p_2 \text{ و } p_1 \vee p_3 \text{ و } p_2 \to p_3\}$

ج- $\Sigma = \{p_1 \leftrightarrow p_2 \text{ و } p_3 \to p_2 \text{ و } p_3 \to p_1\}$

۴- استنتاج‌های صوری زیر را ثابت کنید.

الف- $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$

ب- $\{p \to q, \neg q\} \vdash \neg p$

ج- $\vdash p \to \neg\neg p$

د- $\{p \vee q, \neg p, \neg q\} \vdash r$

جهت رفع اشکال و مشاوره می‌توانید از طریق عضویت در گروه
eitaa.com/joinchat/1210122283G5bb1accf55
در پیام‌رسان ایتا اقدام کنید.

نتیجه (فشردگی) اگر $\Sigma \subseteq FL$ به طوری که هر زیرمجموعه متناهی Σ ارضاپذیر است آنگاه Σ ارضاپذیر است.

برهان. با توجه به فرض ارضاپذیری زیرمجموعه های متناهی Σ و مثال سوم از صفحه ۱، هر زیرمجموعه متناهی Σ سازگار است. لذا بنا به نکته ۳ در صفحه ۱ خود Σ سازگار است حال از قضیه تمامیت در صفحه ۸ نتیجه می‌شود Σ ارضاپذیر است.

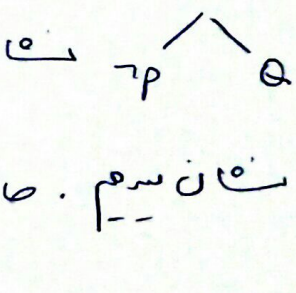
نکته. عکس قضیه فوق هم برقرار است (چرا؟)

الگوریتم درختی برای تعیین قابلیت استنتاج.

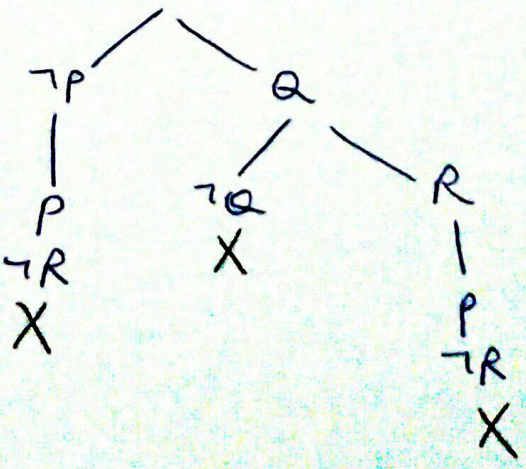
در این روش برای هر مجموعه متناهی از فرمول های یک زبان سازگار بودن و یا سازگار نبودن آن را معلوم می‌کنیم. الگوریتم را در قالب مثال زیر توضیح میدهیم.

مثال آیا مجموعه فرمول ها $\Sigma = \{P \to Q, Q \to R, \neg(P \to R)\}$ سازگار است؟

از یکی از فرمول های Σ شروع می‌کنیم. بعنوان مثال $P \to Q$ را انتخاب می‌کنیم. بنا به قواعد امتقا نویسی که در جلسات ابتدایی رسم گفتیم این فرمول با $\neg P \vee Q$ برابر است. این را با دو شاخه نشان میدهیم. همچنین $\neg(P \to R)$ نیز به اختصار $P \wedge \neg R$ است که با



نشان میدهیم. حال هر کدام از فرمول های Σ را که فرمول های P یا Q که در نمودار ترسیمی وجود دارند، در آنها موجود است به این نمودار اضافه می‌کنیم و نمودار زیر حاصل می‌شود



چون در هر سه شاخه این نمودار به تناقض های P و $\neg P$، Q و $\neg Q$، R و $\neg R$ رسیدیم پس همه شاخه ها بسته شده. لذا Σ

سازگار نیست و در نتیجه تصدیق پذیر هم نیست. یعنی هیچ تعبیر M از زبان $L=\{P,Q,R\}$ وجود ندارد که همه فرمول Σ در آن ارزش 1 پیدا کنند.

پس اگر در نظر داریم در حقیقت مجموعه ای از فرمول ها همه شاخه ها به تناقض برسند آن مجموعه از فرمول ها سازگار (تصدیق پذیر) نیست. اما اگر یک شاخه به تناقض نرسید آن مجموعه از فرمول ها سازگار است.

مسئله: به کمک آنچه در حقیقت تصدیق پذیری (سازگاری) مجموعه فرمول های زیر را بررسی کنید.

$$\Sigma=\{P_1\longrightarrow P_2\ ,\ P_2\longrightarrow \neg P_3\ ,\ \neg(P_3\longrightarrow \neg P_2)\}$$

منطق محمولات

تعریف: یک چهارتایی به صورت $L=\langle\{\bar{c}_i\}_{i\in I},\{\bar{f}_j\}_{j\in J},\{\bar{R}_k\}_{k\in L},\#\rangle$ را یک زبان صوری منطق محمولات می نامیم که در آن $\bar{R}_k$ ها، $\bar{f}_j$ ها و $\bar{c}_i$ ها نمادهای دلخواهی هستند و دو به دو متمایزند و برای $\bar{f}_j$ ها و $\bar{R}_k$ ها، $\#\bar{f}_j$ و $\#\bar{R}_k$ اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی 1 هستند. $\bar{c}_i$ ها ثابت های زبان (نشانه یا سمبل)، $\bar{f}_j$ ها را تابع نشانه ها و $\bar{R}_k$ ها را رابطه نشانه ها می نامیم.

مثال - $L=\langle\phi,\phi,\phi,\#\rangle$ یک زبان صوری منطق محمولات است که ϕ نشان دهنده مجموعه تهی است.

- $L=\langle\{\bar{c}\},\{\bar{f}_1,\bar{f}_2\},\{\bar{R}\},\#\rangle$ ، $\#\bar{f}_1=2$ ، $\#\bar{f}_2=2$ ، $\#\bar{R}=2$ یک زبان صوری منطق محمولات است. (مثلاً بعداً که خواستیم تعبیر کنیم $\#\bar{f}_1=2$ یعنی $\bar{f}_1$ تابعی دو متغیره شود.)

در هر زبان صوری منطق محمولات علاوه بر نمادهایی که خود زبان ارائه میکند نمادهای زیر در ساخت فرمول‌ها و عبارات زبان بکار می‌روند.

نمادهای منطقی : $\neg$ و $\rightarrow$ و $\forall$ و $\approx$

نمادهای کمکی : (و) و ,

متغیرها : $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_2$ و ... و $\bar{v}_n$ و ...

تعریف. هر دنباله متناهی از نمادهای یک زبان L و نمادهای منطقی و کمکی و متغیرها را یک عبارت زبان L می‌نامیم.

تعریف. اگر L یک زبان منطق محمولات باشد آنگاه کلیه عبارت‌های L که به طریق زیر ساخته می‌شوند ترم‌های زبان L می‌نامیم.

۱) هر یک از ثابت‌های L و هر یک از متغیرها ترم هستند.

۲) اگر $\bar{f}$ یک تابع نشانه باشد و $\# f = k$ و t_1 و ... و t_k ترم‌های دلخواه باشند آنگاه عبارت $f(t_1, \dots, t_k)$ نیز ترم است.

۳) یک ترم عبارتی است که طی تعداد متناهی مرحله از تلفیق مراحل ۱ و ۲ ساخته شده باشد.

برای هر ترم تعداد تابع نشانه‌های بکار رفته در آن را درجه ترم می‌نامیم.

مثال - در زبان $L = \langle \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\}, \Phi, \Phi, \# \rangle$ تنها ترم‌های زبان L عبارتند از ثابت‌های $\bar{c}_1$ و $\bar{c}_2$ و $\bar{c}_3$ و متغیرهای $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_2$ و ... و $\bar{v}_n$ و ... که همگی از درجه صفر هستند.

- اگر $L = \langle \Phi, \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}, \Phi, \# \rangle$ و $\# \bar{f}_1 = 2$ و $\# \bar{f}_2 = 3$ آنگاه عبارتهای زیر از جمله ترم‌های L می‌باشند.

• متغیرهای $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_2$ و ... که ترم‌های از درجه صفر هستند.

• $\bar{f}_1(v_1, v_5)$ و $\bar{f}_1(v_2, v_9)$ و $\bar{f}_1(v_3, v_4)$ (چون $\#\bar{f}_1 = 2$) ترم‌هایی از درجه یک هستند.

• $\bar{f}_2(\bar{f}_1(v_1, v_4), v_7, \bar{f}_1(v_{11}, v_{17}))$ (چون $\#\bar{f}_2 = 3$) ترمی از درجه ۳ است.

– مجموعه ترم‌های یک زبان منطق محمولات مانند L را با نماد $Term(L)$ نشان می‌دهیم.

تعریف اگر $L = \langle \{\bar{c}_i\}_{i\in I}, \{\bar{f}_j\}_{j\in J}, \{\bar{R}_k\}_{k\in L}, \# \rangle$ یک زبان منطق محمولات باشد آنگاه عبارت‌هایی از L که به شکل زیر ساخته می‌شوند یک فرمول زبان L نامیده می‌شود.

۱) اگر t_1 و t_2 دو ترم از L باشند آنگاه $t_1 \approx t_2$ یک فرمول L است.

۲) اگر R یک رابطه n‌تایی زبان L باشد که $\#R = k$ و t_1 و ... و t_k ترم‌های زبان L باشند آنگاه $R(t_1, \dots, t_k)$ یک فرمول L است.

۳) اگر P و Q دو فرمول L باشند آنگاه $(\neg P)$ و $(P \longrightarrow Q)$ نیز فرمول L است.

۴) اگر P یک فرمول L باشد آنگاه برای هر متغیر v_i عبارت $(\forall v_i \; P)$ یک فرمول است.

۵) یک فرمول عبارتی است که با بکارگیری تعداد متناهی مرحله از مراحل ۱ تا ۴ ساخته شود.

– مجموعه فرمول‌های زبان L را با نماد FL نشان می‌دهیم.

مثال در زبان $L = \langle \phi, \phi, \phi, \# \rangle$ ترم‌های L تنها شامل متغیرها هستند. یعنی

$$Term(L) = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n, \dots\}$$

دنبالهٔ عبارات زیر برخی از فرمول‌های L هستند.