# هندسه جبری مقدماتی

با سلام، با توجه به تعطیلات پیش آمده جهت تداوم ارائه درس، به مرور جزوات را در صفحه خانگی ام در وب سایت دانشکده قرار میدهم. برای پاسخ دهی به سوالات نیز گروهی در پیام رسان داخلی ایتا eitaa.com/joinchat/1858011179G4471bf7370 تشکیل شده که می توانید عضو شوید.

## حلقه های نوتری.

در این بخش رده خاصی از حلقه ها که در این درس کاربرد فراوان دارند را معرفی می کنیم

**تعریف و قضیه ۱** شرایط زیر برای حلقه $R$ معادلند.

۱) همه ایده‌آل های $R$ متناهی مولد هستند (یعنی مجموعه مولد متناهی دارند.)

۲) هر زنجیر صعودی از ایده‌آل های $R$ ایستاست. یعنی اگر

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots \quad (*)$$

زنجیری صعودی از ایده‌آل های $R$ باشد آنگاه $t \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$I_t = I_{t+1} = \dots = I_{t+i} = \dots \quad i \geq 1$$

۳) هر مجموعه ناتهی از ایده‌آل های $R$ با رابطه شمول عضو ماکسیمال دارد.

حلقه $R$ را که در یکی از سه شرط معادل بالا صدق کند، حلقه نوتری می نامند (Noetherian ring)

برهان. ۱) $\Rightarrow$ ۲) فرض کنید $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل های $R$ باشد. قرار دهید $I := \bigcup_{j \geq 0} I_j$. در این صورت $I$ ایده‌آلی از $R$ است. (چون $I_j$ ها عناصر زنجیر هستند) لذا طبق فرض $I$ متناهی مولد است و عناصر $x_1, \dots, x_n \in I$ موجودند به طوری که $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. برای هر $i = 1, \dots, n$ عنصر $x_i \in I_{j_i}$ و چون $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ زنجیر هستند پس $j_i \in \mathbb{N}$ موجود است که

$$\exists t \in \mathbb{N} \quad : \quad x_1, \dots, x_n \in I_t$$

در نتیجه چون

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq I_t \subseteq I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

پس $\bigcup_{j\geq 0} I_j = I = I_t$ . یعنی برای هر $i \geq 0$ داریم $I_t = I_{t+i}$ و بنابراین (*) ایستاست.

۲) $\Leftarrow$ ۳) : فرض کنید $\Sigma \neq \emptyset$ مجموعه‌ای از ایده‌آل های $R$ باشد که با رابطه شمول $\subseteq$ مرتب جزئی است. طبق فرض (۲) هر زنجیر صعودی از عناصر $\Sigma$ در $\Sigma$ کران بالا خواهد داشت (چرا؟) حال از لم زورن نتیجه می‌شود $(\Sigma, \subseteq)$ عضو ماکسیمال دارد.

۳) $\Leftarrow$ ۲) : فرض کنید $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل های $R$ باشد. با در نظر گرفتن $\Sigma = \{I_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ و فرض (۳) نتیجه می‌شود $\Sigma$ عضو ماکسیمال نظیر $I_t$ دارد. لذا برای هر $i \geq 0$ داریم $I_t = I_{t+i}$ و بنابراین صعودی ایستاست.

۲) $\Leftarrow$ ۱) : فرض کنید $I$ ایده‌آلی از $R$ باشد و $I \neq 0$. اگر $I$ متناهی مولد نباشد (فرض خلف) آنگاه عنصر $0 \neq x_1 \in I$ موجود است که $I \neq \langle x_1 \rangle$ و همچنین عنصر $x_2$ که $x_2 \in I \setminus \langle x_1 \rangle$ موجود است و $I \neq \langle x_1, x_2 \rangle$. با ادامه این روند از اینکه $I$ متناهی مولد نیست نتیجه می‌شود برای هر $t \in \mathbb{N}$، عناصر $x_{t+1} \in I$ و $x_1, \ldots, x_t$ با شرایط زیر موجودند

$$I \neq \langle x_1, \ldots, x_{t+1} \rangle \text{ و } x_{t+1} \in I \setminus \langle x_1, \ldots, x_t \rangle$$

لذا زنجیر صعودی اکید زیر از ایده‌آل های $R$ حاصل می‌شود

$$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle x_1, \ldots, x_t \rangle \subsetneq \langle x_1, \ldots, x_{t+1} \rangle \subsetneq \cdots$$

که با فرض (۲) تناقض دارد. لذا فرض خلف باطل است و $I$ متناهی مولد است. ▨

مثال‌هایی از حلقه‌های نوتری.

- $\mathbb{Z}$، چون ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}$ به شکل $n\mathbb{Z}$، برای یک $n \in \mathbb{Z}$ هستند. کلاً PID ها
- هر میدان نوتری است، چون تنها ایده‌آل‌های میدان ایده‌آل‌های پیش پا پیش پا و خودش هستند. پس $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ حلقه‌های نوتری اند

# قضیه پایه‌ی هیلبرت

مسئله. نشان دهید حلقه‌های خارج قسمتی از یک حلقه نوتری، نوتری‌اند. یعنی اگر $R$ حلقه‌ای نوتری و $I \triangleleft R$ آنگاه $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای نوتری است.

(راهنمایی. ساختار ایده‌آل‌های حلقه $\frac{R}{I}$ را در نظر بگیرید.)

نکته. زیرحلقه یک حلقه نوتری الزاماً نوتری نیست. به عنوان مثال فرض کنید $k$ یک میدان و $R = k[x_1, x_2, \dots] = \bigcup_{n\geq 1} k[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها از متغیرهای مستقل $\{x_n\}_{n\geq 1}$ باشد. در این صورت $R$ حوزه صحیح است لذا میدان کسرهای $R$ وجود دارد که آن را $L$ می‌نامیم. پس $L$ میدان است پس حلقه‌ای نوتری است در حالیکه $R$ زیرحلقه‌ای از $L$ است و نوتری نیست. (ایده‌آل تولید شده توسط متغیرهای $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ متناهی مولد نیست.)

قضیه پایه‌ای هیلبرت: اگر $R$ حلقه‌ای نوتری باشد، آنگاه $R[x]$، حلقه چندجمله‌ای‌ها روی $R$، نیز حلقه‌ای نوتری است.

برهان. فرض کنید $I$ ایده‌آل دلخواهی از حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ باشد. برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}_0$ مجموعه ضرایب پیشرو چندجمله‌ای‌های از درجه $n$ در $I$ را $I_n$ می‌نامیم. یعنی

$$I_n := \{ a \in R \mid \exists\, f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I \} \subseteq R$$

در این صورت $I_n$ ایده‌آلی از $R$ است (بررسی کنید!) و به علاوه برای هر $n$، $I_n \subseteq I_{n+1}$. پس اگر $a \in I_n$ آنگاه وجود دارد $f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I$ لذا

$$x \cdot f(x) = ax^{n+1} + a_{n-1}x^n + \dots + a_0 x \in I \Rightarrow a \in I_{n+1}.$$

لذا زنجیر صعودی $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$ از ایده‌آل‌های $R$ ساخته می‌شود. پس $R$ نوتری است پس این زنجیر ایستاست. یعنی

$$\exists t \in \mathbb{N} : \forall i \geq 0 \quad I_t = I_{t+i} \qquad (1)$$

## هندسه جبری مقدماتی

به علاوه برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ ، $I_n$ متناهی مولد است. در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ عناصر $a_{n1}, \dots, a_{nm_n} \in I_n$ وجود دارند به طوری که $I_n = \langle a_{n1}, \dots, a_{nm_n} \rangle$ (۲).

در نتیجه با توجه به نحوه تعریف $I_n$ ها، برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $k = 1, \dots, m_n$ داریم

$$\exists\ f_{nk}(x) = a_{nk} x^n + g_{nk}(x) \in I_n \quad , \deg(g_{nk}(x)) < n \qquad (۳)$$

ادعا می‌کنیم ایده‌آل مفروض $I$ در ابتدای برهان توسط مجموعه زیر تولید می‌شود

$$I = \langle f_{nk}(x) \mid n = 0, \dots, t,\ k = 1, \dots, m_n \rangle$$

که $t$ همان است که در رابطه (۱) معرفی شد.

برای این منظور فرض کنید $g(x) \in I$ ، $\deg(g(x)) = n'$ . به استقرا روی $n'$ ثابت می‌کنیم $g(x) \in \langle f_{nk}(x) \mid n = 0, \dots, t, k = 1, \dots, m_n \rangle$.

اگر $n' = 0$ آنگاه

$$g(x) = a \in I_0 = \langle a_{01}, \dots, a_{0m_0} \rangle = \langle f_{01}(x), \dots, f_{0m_0}(x) \rangle$$

و حکم واضح است. حال فرض کنید $\deg(g(x)) = n' > 0$ و برای هر چندجمله‌ای $h(x) \in I$ که $\deg(h(x)) < n'$ داشته باشیم

$$h(x) \in \langle f_{nk}(x) \mid n = 0, \dots, t,\ k = 1, \dots, m_n \rangle .$$

حینی $g(x) \in I$ ، $\deg(g(x)) = n'$ پس عنصر $b \in I_{n'}$ ، $h(x) \in R[x]$ وجود دارند به طوری که $g(x) = bx^{n'} + h(x)$ ، $\deg(h(x)) < n'$ . بنا به رابطه (۲) عناصر $r_{n'1}, \dots, r_{n'm_{n'}} \in R$ وجود دارند که

$$b = r_{n'1} \cdot a_{n'1} + \dots + r_{n'm_{n'}} \cdot a_{n'm_{n'}} \qquad (۴)$$

حال درجات را در نظر می‌گیریم.

# هندسه جبری مقدماتی

حالت اول: $\deg(g(x)) = n' \le t$. در این صورت قرار دهید ( $t$ در رابطه (۱) معرفی شده )

$$g_1(x) := g(x) - \sum_{k=1}^{m_{n'}} r_{n'k} \cdot f_{n'k}(x) \in I$$

$$\overset{\text{بنا به رابطه (۳)}}{=} (b x^{n'} + h(x)) - \sum_{k=1}^{m_{n'}} r_{n'k} \cdot (a_{n'k} x^{n'} + g_{n'k}(x))$$

$$= (b x^{n'} + h(x)) - \sum_{k=1}^{m_{n'}} (r_{n'k} \cdot a_{n'k}) x^{n'} - \underbrace{g''(x)}_{\text{از درجه اکیداً کمتر از } n'}$$

$$\overset{\text{بنا به رابطه (۴)}}{=} h(x) - g''(x) \longrightarrow \text{از درجه اکیداً کمتر از } n'$$

در نتیجه در این حالت حکم برای $g_1(x)$ برقرار است. یعنی

$$g_1(x) \in \langle f_{nk}(x) \mid n = 0, \dots, t,\ k = 1, \dots, m_n \rangle$$

و از نحوه تعریف $g_1(x)$ نتیجه می‌گیریم

$$g(x) \in \langle f_{nk}(x) \mid n = 0, \dots, t,\ k = 1, \dots, m_n \rangle$$

و حکم ثابت می‌شود.

حالت دوم: $\deg(g(x)) = n' > t$ - در این حالت $b \in I_n = I_t$ (بنا به رابطه (۱)) و عناصر $r_{t1}, \dots, r_{tm_t} \in R$ موجودند به طوری که

$$b = r_{t1} \cdot a_{t1} + \dots + r_{tm_t} \cdot a_{tm_t} \qquad (۵)$$

قرار دهید

$$g_1(x) = g(x) - \sum_{k=1}^{m_t} x^{n'-t} \cdot r_{tk} \cdot f_{tk}(x) \in I$$

$$\overset{\text{بنا به رابطه (۳) و (۵)}}{=} \left[\left(\sum_{k=1}^{m_t} r_{tk} \cdot a_{tk}\right) x^{n'} + h(x)\right] - \left[\left(\sum_{k=1}^{m_t} r_{tk} \cdot a_{tk}\right) \cdot x^{n'} + \underbrace{g''(x)}_{\text{از درجه اکیداً کمتر از } n'}\right]$$

$$= \underbrace{h(x) - g''(x)}_{\text{از درجه اکیداً کمتر از } n'} \in I$$

لذا بنا به فرض استقرا داریم

$$g_1(x) \in \langle f_{nk}(x) \mid n=0,\dots,t,\ k=1,\dots,m_n \rangle$$

و با توجه به مجزا تعریف $g_1(x)$ نتیجه می‌شود

$$g(x) \in \langle f_{nk}(x) \mid n=0,\dots,t,\ k=1,\dots,m_n \rangle$$

حال به استقرا نتیجه می‌شود

$$I = \langle f_{nk}(x) \mid n=0,\dots,t,\ k=1,\dots,m_n \rangle$$

یعنی ایده‌آل دلخواه $I$ از حلقه $R[x]$ مجموعه مولدی متناهی دارد. لذا $I$ متناهی مولد است و در نتیجه $R[x]$ حلقه‌ای نوتری است. $\boxtimes$

نتیجه ۳. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای مستقل روی حلقه نوتری $R$ باشند آنگاه حلقه چند جمله‌ای $R[x_1, \dots, x_n]$ نیز نوتری است.

برهان. به استقرا روی $n$.

مسائل تحویلی سری دوم — هندسه جبری مقدماتی

(تاریخ تحویل ۹۹/۱/۱۴ — Jahangiri@khu.ac.ir)

* در سوالات زیر $R$ حلقه ای جابجایی است.

۱- الف- اگر $a,b$ عناصری پوچ توان از حلقه $R$ باشند آنگاه نشان دهید $a+b$ نیز پوچ توان است.

ب- اگر $a,b\in R$ به طوری که $a$ پوچ توان و $b$ یکال باشد (یعنی وارون ضربی داشته باشد) آنگاه نشان دهید $a+b$ عضوی یکال است.

۲- عضو $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ را در حلقه چند جمله ای های $R[x]$ در نظر بگیرید.

الف- نشان دهید $f(x)\in R[x]$ پوچ توان است اگر و تنها اگر $a_n\in R$ و ... و $a_0$ پوچ توان باشند.

ب- نشان دهید $f(x)\in R[x]$ یکال است اگر و تنها اگر $a_0\in R$ یکال و $a_1$ و ... و $a_n\in R$ پوچ توان باشند.

(راهنمایی: از سوال ۱ استفاده کنید.)

۳- مجموعه ایده آل های اول حلقه های زیر را مشخص کنید.

$R=\mathbb{Z}$ ، $R=\mathbb{C}[x]$ ، $R=\mathbb{R}[x]$ ، $R=\mathbb{R}$ ، $R=\dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{\langle x(y-2)\rangle}$ و $R=\dfrac{\mathbb{C}[x]}{\langle x^n\rangle}$

۴- الف- اگر $k$ یک میدان و $\alpha_1$ و ... و $\alpha_i\in k$ عناصری متمایز باشند آنگاه نشان دهید یکریختی حلقه ای زیر برقرار است

$$\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{\langle x_1-\alpha_1,\dots,x_i-\alpha_i\rangle}\cong k[x_{i+1},\dots,x_n]$$

که در آن $x_1$ و ... و $x_n$ متغیرهایی مستقل و $i\le n$.

ب- اگر $k$ یک میدان و $\alpha_1$ و ... و $\alpha_n\in k$ آنگاه نشان دهید ایده آل تولید شده توسط $\langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle$ ایده آل ماکسیمالی از حلقه چند جمله ای های $k[x_1,\dots,x_n]$ است.

۵- برای ایده‌ال $I$ از حلقه $R$ قرار دهید

$$I[x] := \left\{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}_0 \\ a_0, \ldots, a_n \in I \end{array} \right\}$$

الف- اگر $I \triangleleft R$ آنگاه نشان دهید $I[x] \triangleleft R[x]$ .

ب- اگر $P \in \operatorname{spec}(R)$ آنگاه نشان دهید $P[x] \in \operatorname{spec}(R[x])$

(راهنمایی: برای $I \triangleleft R$ نشان دهید $\frac{R[x]}{I[x]} \cong \frac{R}{I}[x]$ و حرفها ت)

ج- اگر $M \in \max(R)$ آیا $M[x] \in \max(R[x])$ ؟ ادعای خود را ثابت کنید

۶- الف- اگر $k$ یک میدان باشد آنگاه نشان دهید حلقه چند جمله‌ای های $k[x]$ یک PID است .

(راهنمایی: الگوریتم تقسیم در $k[x]$ برقرار است یعنی برای هر $f(x), g(x) \in k[x]$ چند جمله‌ای های منحصر بفرد $q(x), r(x) \in k[x]$ وجود دارند به طوری که

$$f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$$

به طوری که $r(x) = 0$ یا $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ .)

ب- نشان دهید حکم بند (الف) برای حلقه چند جمله‌ای های $k[x, y]$ درست نیست .