مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها

تعریف. اگر Σ مجموعه‌ای از فرمول‌های زبان L باشد یعنی $\Sigma \subseteq FL$ آنگاه Σ را سازگار می‌نامیم هرگاه فرمولی مانند $P \in FL$ وجود نداشته باشد به طوری که $\Sigma \vdash P$ و $\Sigma \vdash \neg P$. در غیر این صورت Σ را ناسازگار می‌نامیم.

مثال: - $\emptyset$ سازگار است. چون در غیر این صورت اگر $P \in FL$ موجود باشد به طوری که $\vdash P$ و $\vdash \neg P$ آنگاه طبق قضیه هماهنگی $\models P$ و $\models \neg P$. و این یعنی P و $\neg P$ هر دو توتولوژی هستند که تناقض است.

- مجموعه‌های تک عضوی ناسازگار هستند. (ثابت کنید!)

- اگر $\Sigma \subseteq FL$ قضیه پذیر باشد، سازگار فرض می‌شود.

(برهان. چون Σ قضیه پذیر است مدلی مانند M دارد. اگر $P \in FL$ به طوری که $\Sigma \vdash P$ و $\Sigma \vdash \neg P$ آنگاه بنا به قضیه هماهنگی $\Sigma \models P$ و $\Sigma \models \neg P$ و این یعنی $P^M = 1$ و $(\neg P)^M = 1$ که یک تناقض است.)

نکات: ۱) اگر $\Sigma \subseteq FL$ ناسازگار باشد و $\Sigma \subseteq \Sigma'$ آنگاه Σ' نیز ناسازگار خواهد شد.

۲) اگر Σ ناسازگار باشد زیرمجموعه متناهی Σ_0 از Σ موجود است که Σ_0 ناسازگار است. (یعنی ناسازگاری بدون یک مجموعه بدیهی ناسازگاری تعداد متناهی از فرمول‌های Σ است.

فرض کنید $P \in FL$ به طوری که $\Sigma \vdash P$ و $\Sigma \vdash \neg P$. لذا طبق تعریف دنباله متناهی فرمول‌های $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m$ موجود هستند و یا فرمولی از Σ هستند و یا با قاعده MP بدست آمده‌اند. کافی است Σ_0 را P_i و Q_j هایی در نظر بگیریم که عضو Σ هستند. در این صورت $\Sigma_0 \vdash P$ و $\Sigma_0 \vdash \neg P$.)

۳) اگر هر زیرمجموعه متناهی $\Sigma \subseteq FL$ سازگار باشد، Σ سازگار فرض می‌شود.

مسائل منطق

قضیه ۱ برای مجموعه ای از فرمول ها مانند Σ و فرمول P داریم $\Sigma \vdash P$ اگر و تنها اگر $\Sigma, \neg P$ ناسازگار باشند.

برهان. $\Leftarrow$) اگر $\Sigma \vdash P$ آنگاه $\Sigma, \neg P \vdash P$ به علاوه $\Sigma, \neg P \vdash \neg P$. لذا $\Sigma, \neg P$ ناسازگار است.

$\Rightarrow$) فرض کنید $\Sigma, \neg P$ ناسازگار باشد. در این صورت فرمول Q موجود است بطوری که $\Sigma, \neg P \vdash Q$ و $\Sigma, \neg P \vdash \neg Q$. لذا طبق قضیه استنتاج داریم $\Sigma \vdash \neg P \to Q$ و $\Sigma \vdash \neg P \to \neg Q$. حال بنا به برهان های زیر را می سازیم

1) $\neg P \to Q$ — از Σ نتیجه شده

2) $\neg P \to \neg Q$ — از Σ نتیجه شده

3) $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ — اصل موضوع ۱

4) $(\neg P \to \neg Q) \to P$ — ۱ و ۳ و MP

5) P — ۲ و ۴ و MP ∎

قضیه ۲ Σ ناسازگار است اگر و تنها اگر برای هر فرمول $Q \in FL$، $\Sigma \vdash Q$.

برهان. $\Leftarrow$) واضح است.

$\Rightarrow$) چون Σ ناسازگار است پس فرمول $P \in FL$ موجود است به طوری که $\Sigma \vdash P$ و $\Sigma \vdash \neg P$. فرض کنید $Q \in FL$ دلخواه باشد. در این صورت بنا به برهان های زیر را داریم

1) $(\neg Q \to P) \to ((\neg Q \to \neg P) \to Q)$ — اصل موضوع ۳

2) $P \to (\neg Q \to P)$ — اصل موضوع ۱

3) P — از Σ نتیجه شده

4) $\neg Q \to P$ — ۲ و ۳ و MP

5) $(\neg Q \to \neg P) \to Q$ — ۱ و ۴ و MP

۶) $\neg P \to (\neg Q \to \neg P)$ اصل موضوعه ۱

۷) $\neg P$ از Σ نتیجه شده

۸) $\neg Q \to \neg P$ ۶ و ۷ و MP

۹) Q ۵ و ۸ و MP ■

تعریف. فرض کنید $\Sigma \subseteq FL$ و $P \in FL$. در این صورت P را مستقل از Σ می‌نامیم هرگاه $\Sigma \nvdash P$ و $\Sigma \nvdash \neg P$.

مثال ۴ - اگر P نه توتولوژی باشد و نه تناقض آنگاه P از $\emptyset$ مستقل است.

- در زبان $L = \{P_1, P_2\}$ فرمول P_1 از P_2 مستقل است اگر $P_2 \vdash P_1$ آنگاه بنابه خاصیت شماره ۴ استنتاج صوری $\vdash P_2 \to P_1$. این یعنی فرمول $P_2 \to P_1$ توتولوژی است. در حالیکه اگر M تعبیری از L باشد به طوری که $P_1^M = 0$ و $P_2^M = 1$ آنگاه $(P_2 \to P_1)^M = 0$.

به علاوه اگر $P_2 \vdash \neg P_1$ آنگاه $\vdash P_2 \to \neg P_1$. در حالیکه اگر تعبیر M از L به گونه ای باشد که $P_1^M = 1$ و $P_2^M = 1$ آنگاه $(P_2 \to \neg P_1)^M = 0$.

- اگر $P, Q \in FL$ آنگاه $P \wedge Q \vdash P$ لذا P از $P \wedge Q$ مستقل نیست.

گزاره ۳ فرمول P از مجموعه فرمول‌های Σ مستقل است اگر و تنها اگر Σ, P و $\Sigma, \neg P$ هر دو سازگار باشند.

برهان. ($\Leftarrow$) اگر Σ, P سازگار نباشد (فرض خلف) آنگاه فرمول $Q \in FL$ موجود است به طوری که $\Sigma, P \vdash Q$ و $\Sigma, P \vdash \neg Q$. لذا بنابه خاصیت ۴ استنتاج صوری $\Sigma \vdash P \to Q$ و همچنین $\Sigma \vdash P \to \neg Q$. حال بنابه برهان ۴ زیر را در نظر بگیرید.

۱) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$ اصل موضوعه ۳

۲) $P \to Q$ از Σ نتیجه شده

۳) $(P \to \neg Q) \to \neg P$ ۱ و ۲ و MP

منطق معلق

۶) $P \to \neg Q$ از Σ نتیجه شده

۷) $\neg P$ ۳ و ۴ و MP

یعنی $\Sigma \vdash \neg P$ که با فرض مستقل بودن P از Σ در تناقض است پس P و Σ سازگارند. مشابهاً ثابت می‌شود $\neg P$ و Σ نیز سازگارند. (ثابت کنید!) ▨

تعریف. فرض کنید Σ زیرمجموعه‌ای از فرمول‌های زبان L باشد. Σ را یک نظریه می‌نامیم هرگاه برای هر فرمول $P \in FL$ اگر $\Sigma \vdash P$ آنگاه $P \in \Sigma$.

(یعنی Σ تنها فرمول‌های خودش را به طور صوری نتیجه دهد.)

مثال. - اگر $\Sigma \subseteq FL$ آنگاه قرار دهید $\bar{\Sigma} := \{P \in FL \mid \Sigma \vdash P\}$. در این صورت $\bar{\Sigma}$ یک نظریه است و به علاوه $\Sigma \subseteq \bar{\Sigma}$. اگر Σ خود یک نظریه باشد آنگاه $\bar{\Sigma} = \Sigma$.

تعریف. اگر $\Sigma \subseteq FL$ و $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ به طوری که $\bar{\Sigma_0} = \Sigma$ آنگاه Σ_0 را یک دستهٔ اصل موضوع برای Σ می‌نامیم.

گزاره ۴. اگر $\Sigma \subseteq FL$ و Σ_0 یک دستهٔ اصل موضوعه برای Σ باشد آنگاه Σ سازگار است اگر و تنها اگر Σ_0 سازگار باشد.

برهان تمرین!

تعریف. نظریه $\Sigma \subseteq FL$ را کامل نامیم هرگاه برای هر فرمول $P \in FL$ داشته باشیم $P \in \Sigma$ یا $\neg P \in \Sigma$.

مثال. FL یک نظریه کامل است.

تعریف. مجموعه فرمول‌های $\Sigma \subseteq FL$ را ماکسیمال سازگار نامیم هرگاه Σ سازگار باشد و برای هر فرمول $P \in FL \setminus \Sigma$، P و Σ ناسازگار باشند.

مباحث متفرق

قضیه ۹. $\Sigma \subseteq FL$ ماکسیمال سازگار است اگر و تنها اگر Σ یک نظریه کامل سازگار باشد.

برهان. $\Rightarrow$) ابتدا فرض کنید Σ ماکسیمال سازگار است. کافی است نشان دهیم Σ یک نظریه کامل است.
ابتدا نشان می‌دهیم Σ یک نظریه است. برای این منظور فرض کنید $P \in FL$ به طوری که $\Sigma \vdash P$
ولی $P \notin \Sigma$ (فرض خلف). در این صورت Σ, P ناسازگار است. یعنی فرمول $Q \in FL$ وجود
دارد به طوری که $\Sigma, P \vdash Q$ و $\Sigma, P \vdash \neg Q$. بنابه خاصیت ۴ استنتاج صوری داریم
$\Sigma \vdash P \to Q$ و $\Sigma \vdash P \to \neg Q$. حال بنابه برهان‌های زیر را در نظر می‌گیریم

۱) $P \to Q$ از Σ نتیجه شده	۱) $P \to \neg Q$ از Σ نتیجه شده
۲) P از Σ نتیجه شده	۲) P از Σ نتیجه شده
۳) Q MP, ۲ و ۱	۳) $\neg Q$ MP, ۲ و ۱

در نتیجه $\Sigma \vdash Q$ و $\Sigma \vdash \neg Q$ یعنی Σ ناسازگار است که با فرض تناقض است. لذا فرض
خلف باطل است. یعنی $P \in \Sigma$ و Σ یک نظریه است. حال نشان می‌دهیم Σ یک نظریه کامل است.
اگر Σ کامل نباشد (فرض خلف) آنگاه فرمول $P \in FL$ وجود است به طوری که $P \notin \Sigma$ و
$\neg P \notin \Sigma$. در نتیجه Σ, P و $\Sigma, \neg P$ هر دو ناسازگارند. لذا فرمول $Q \in FL$ وجود
است به طوری که $\Sigma, P \vdash Q$ و $\Sigma, P \vdash \neg Q$. حال بنابه استنتاج‌های صوری زیر را
در نظر می‌گیریم

۱) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$ اصل موضوع ۲

۲) $P \to Q$ فرض و قضیه استنتاج

۳) $(P \to \neg Q) \to \neg P$ MP, ۲ و ۱

۴) $P \to \neg Q$ فرض و قضیه استنتاج

۵) $\neg P$ MP, ۴, ۳

بنابراین $\Sigma \vdash \neg P$. مشابهاً از ناسازگاری $\Sigma, \neg P$ نتیجه می‌شود $\Sigma \vdash P$ (ثابت کنید!)

و این با سازگاری Σ تناقض دارد. لذا فرض خلف باطل است یعنی $p \in \Sigma$ یا $\neg p \in \Sigma$. بعبارتی Σ یک نظریه کامل است

$\Rightarrow$) حال فرض کنید Σ یک نظریه کامل سازگار باشد. نشان می‌دهیم Σ ماکسیمال سازگار است.

واضح است که Σ سازگار است. فرض کنید $p \in FL \setminus \Sigma$. در این صورت چون Σ نظریه کامل است پس $\neg p \in \Sigma$. لذا $\Sigma \vdash \neg p$. در نتیجه $\Sigma, p \vdash \neg p$. همچنین $\Sigma, p \vdash p$. پس Σ, p ناسازگار است و Σ ماکسیمال سازگار است. ∎

قضیه ۶. فرض کنید $\Sigma \subseteq FL$ ماکسیمال سازگار باشد و $P, Q \in FL$. در این صورت $P \to Q \in \Sigma$ اگر و تنها اگر $Q \in \Sigma$ یا $\neg P \in \Sigma$.

برهان. $\Rightarrow$) ابتدا فرض کنید $\neg P \in \Sigma$. در این صورت $P \notin \Sigma$ (چون Σ سازگار است) لذا Σ, P ناسازگار است (چون Σ ماکسیمال سازگار است) پس بنا به قضیه ۲ در صفحه ۲، $\Sigma, P \vdash Q$ و از قضیه استنتاج نتیجه می‌شود $\Sigma \vdash P \to Q$ و بنا به قضیه ۵، $P \to Q \in \Sigma$.

حال فرض کنید $Q \in \Sigma$. در این صورت $\Sigma \vdash Q$ لذا $\Sigma, P \vdash Q$ و مجدداً از قضیه استنتاج نتیجه می‌شود $\Sigma \vdash P \to Q$ و بنا به قضیه مثل $P \to Q \in \Sigma$.

$\Leftarrow$) حال فرض کنید $P \to Q \in \Sigma$ و $\neg P \notin \Sigma$. بنا به قضیه ۵، Σ یک نظریه کامل است پس $P \in \Sigma$. در نتیجه $\Sigma \vdash P$ به علاوه $\Sigma \vdash P \to Q$ و از قاعده MP نتیجه می‌شود $\Sigma \vdash Q$ و چون Σ نظریه کامل است $Q \in \Sigma$. ∎

در قضیه مهم بعد از اصل بدیهی ای در ریاضی استفاده می‌کنیم که به "لم زورن" معروف است ممکن است این لم را در درس مبانی ریاضی دیده باشید. بهرحال، بعدها در همین درس به تفصیل آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

لم زورن فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعه ای رتبت جزئی باشد به طوری که هر زنجیر صعودی در A دارای کران بالا باشد. در این صورت $(A, \leq)$ دارای عضو ماکسیمال است.

۳. فرض کنید $\Sigma \subseteq \mathcal{FL}$ مجموعه‌ای سازگار از فرمول‌های زبان $\mathcal{L}$ باشد. در این صورت مجموعه ماکسیمال سازگار $\Sigma' \subseteq \mathcal{FL}$ موجود است به طوری که $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

برهان. قرار دهید $A := \{\Sigma_0 \subseteq \mathcal{FL} \mid \Sigma_0 \text{ سازگار است و } \Sigma \subseteq \Sigma_0\}$. مجموعه A همراه رابطه شمول یک مجموعه وبت جزئی است (بررسی کنید!) نشان می‌دهیم $(A, \subseteq)$ در شرایط لم زورن که در بالا مطرح شد صدق می‌کند. فرض کنید $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ زنجیری صعودی از عناصر A باشد یعنی برای هر $i, j \in I$، $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j$ یا $\Sigma_j \subseteq \Sigma_i$. در این صورت $\Sigma_0 := \bigcup_{i\in I} \Sigma_i$ کران بالایی برای زنجیر $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ در A است. چون اولاً: واضح است که برای هر $j \in I$، $\Sigma_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \Sigma_i$. پس Σ_0 کران بالایی برای این زنجیر است.

ثانیاً: چون برای هر $i \in I$، $\Sigma_i \in A$ پس $\Sigma \subseteq \Sigma_i$ لذا $\Sigma \subseteq \Sigma_0 = \bigcup_{i\in I} \Sigma_i$.

بعلاوه چون $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ زنجیر است پس هر زیرمجموعه متناهی از Σ_0 زیرمجموعه‌ای از یکی از Σ_iها است (چرا؟) و چون Σ_i سازگار است پس هر زیرمجموعه متناهی از Σ_0 سازگار است و از نکته (۳) در صفحه ۱ نتیجه می‌شود Σ_0 سازگار است.

در نتیجه $\Sigma_0 \in A$ کران بالایی برای زنجیر $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ در A است.

حال از لم زورن نتیجه می‌شود $(A, \subseteq)$ عضو ماکسیمال دارد مانند Σ'. در واقع Σ' یک مجموعه ماکسیمال سازگار است که شامل Σ می‌باشد. چون $\Sigma \subseteq \Sigma'$ و Σ' سازگار است اگر Σ' ماکسیمال سازگار نباشد آنگاه $p \in \mathcal{FL}$ موجود است که $p \notin \Sigma'$ و $\Sigma' \cup p$ سازگار است. در حالی که $\Sigma \subseteq \Sigma' \subsetneq \Sigma' \cup p$ و این با ماکسیمال بودن Σ' در A تناقض دارد.

$\boxtimes$

قضیه تمامیت ۷. فرض کنید $L = \{P_i\}_{i\in I}$ و $\Sigma \subseteq FL$ مجموعه‌ای سازگار از فرمول‌های زبان L باشد. در این صورت Σ ارضاپذیر است.

برهان. بنا به لم قبل مجموعه ماکسیمال سازگار $\Sigma' \subseteq FL$ وجود دارد به طوری که $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

تعبیر M از زبان L را به صورت زیر ارائه می‌دهیم $M : L \longrightarrow \{0,1\}$.

$$P_i \longmapsto \begin{cases} 1 & P_i \in \Sigma' \\ 0 & P_i \notin \Sigma' \end{cases}$$

نشان می‌دهیم M مدلی برای Σ' و در نتیجه مدلی برای Σ است.

به استقرا روی درجه فرمول‌های زبان L، ثابت می‌کنیم برای هر فرمول P داریم

$$P^M = \begin{cases} 1 & P \in \Sigma' \\ 0 & P \notin \Sigma' \end{cases}$$

فرض کنید رابطه بالا برای تمام فرمول‌های با درجه اکیداً کمتر از n برقرار است و $P \in FL$ فرمولی از درجه n است.

اگر $n=0$ آنگاه $i \in I$ وجود دارد که $P = P_i$ و حکم واضح است.

اگر $n \geq 1$ آنگاه P به یکی از دو صورت زیر است:

حالت ۱: $Q \in FL$ وجود دارد به طوری که $P = \neg Q$. Q از درجه $n-1$ است و طبق فرض استقرا $Q^M = \begin{cases} 1 & Q \in \Sigma' \\ 0 & Q \notin \Sigma' \end{cases}$ چون Σ' ماکسیمال سازگار است، طبق قضیه شماره ۵ در صفحه ۵، $P \in \Sigma'$ یا $\neg P \in \Sigma'$. اگر $P \in \Sigma'$ آنگاه $\neg Q \in \Sigma'$ و چون Σ' سازگار است پس $Q \notin \Sigma'$ لذا $Q^M = 0$ و در نتیجه $P^M = (\neg Q)^M = 1$.

اگر $\neg P \in \Sigma'$ آنگاه چون Σ' سازگار است، $P \notin \Sigma'$ و $Q \in \Sigma'$ لذا $Q^M = 1$ و لذا $P^M = (\neg Q)^M = 0$.

حالت ۲: $Q_1, Q_2 \in FL$ وجود دارند به طوری که $P = Q_1 \longrightarrow Q_2$. در این حالت درجه Q_1

و درجه Q_2 اکیداً از n کمتر است و حکم برای آنها برقرار است یعنی

$$Q_1^M = \begin{cases} 1 & Q_1 \in \Sigma' \\ 0 & Q_1 \notin \Sigma' \end{cases} \qquad Q_2^M = \begin{cases} 1 & Q_2 \in \Sigma' \\ 0 & Q_2 \notin \Sigma' \end{cases}$$

حال اگر $Q_2 \in \Sigma' \longrightarrow P = Q_1$ آنگاه بنا به قضیه شماره ۶ در صفحه ۶، چون Σ' مکسیمال سازگار است، $\neg Q_1 \in \Sigma'$ یا $Q_2 \in \Sigma'$ حال با توجه به اینکه

$$P^M = (Q_1 \longrightarrow Q_2)^M = \begin{cases} 1 & Q_1^M = 0 \text{ یا } Q_2^M = 1 \\ 0 & Q_1^M = 1 \text{ و } Q_2^M = 0 \end{cases}$$

نتیجه می‌شود

$$P^M = \begin{cases} 1 & P \in \Sigma' \\ 0 & P \notin \Sigma' \end{cases}$$

. در نتیجه هر مدل Σ در این تفسیر M ارزش 1 پیدا می‌کند یعنی M مدلی برای Σ' است و چون $\Sigma \subseteq \Sigma'$ پس M مدلی برای Σ نیز است. لذا Σ تصدیق پذیر است. ☑

نتیجه (عکس قضیه هماهنگی) اگر $\Sigma \subseteq FL$ و P فرمولی از زبان L باشد به طوری که $\Sigma \models P$ آنگاه $\Sigma \vdash P$. (یعنی اگر Σ نظر معنایی P را نتیجه دهد به صورت صوری هم P را نتیجه می‌دهد.)

برهان. از تعریف استنتاج معنایی را نتیجه $\Sigma \models P$ نتیجه می‌شود $\Sigma, \neg P$ تصدیق ناپذیر است (یعنی مدلی ندارد.) لذا بنا به قضیه قبل $\Sigma, \neg P$ ناسازگار است. حال از قضیه 1 در صفحه ۲ نتیجه می‌شود $\Sigma \vdash P$.

نتیجه. اگر P یک توتولوژی باشد آنگاه $\vdash P$.

(چون داریم $\models P$.)